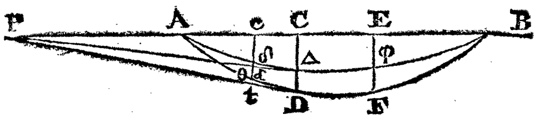
IV. *De motu Nervi tensi. Per* Brook Taylor *Armig. Regal. Societat. Sodal.*

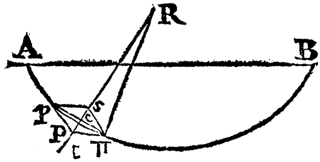
Lemma I.



Sint ADFB, *&* A$\Delta\Phi$B *Curvæ duæ, quarum relatio inte se hæc est, ut, ductis ad libitum ordinatis* CΔD, EΦF, *sit* CΔ : CD :: EΦ : EF. *Tum ordinatis in infinitum imminutis, adeo ut coincidant Curvæ cum axe* AB; *dico quod sit ultima ratio curvaturæ in* Δ *ad curvaturam in* D, *ut* CΔ *ad* CD.

D*Emonstr.* Duc ordinatam cδd ipsi CD proximam; & ad D & Δ duc tangentes Dt & $\Delta\theta$, ordinatæ cd occurrentes in t & θ. Tum ob cδ : cd :: CΔ : CD (per Hypothesin) tangentes productæ sibi invicem & axi occurrent in eodem puncto P. Unde ob triangula similia CDP & ctP, CΔP & cθP, erit cθ : ct :: CΔ : CD (:: cδ : cd, per Hyp) :: $\delta\theta$ (= cθ - cδ) ad dt (= ct - cd.) Atqui sunt curvaturæ in Δ & D, ut anguli contactûs $\theta\Delta\delta$ & tDd; & ob $\delta\Delta$ & dD coincidentes cum cC, anguli isti sunt ut eorum subtensæ $\delta\theta$ & dt, hoc est (per analogiam supra inventam) ut CΔ & CD. Quare, *&c.* Q.E.D.

Lemma 2.

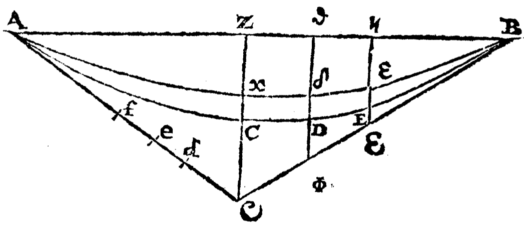


In aliquo articulo vibrationis suæ induat Nervus tensus, inter puncta A & B, formam curvæ cujusvis A p π B. Tum dico quod sit incrementum velocitatis puncti alicujus P, seu acceleratio oriunda a vi tensionis Nervi, ut curvatura Nervi in eodem puncto.

Demonstr. Finge Nervum constare ex particulis rigidis æqualibus infinite parvis p P & P π, *&c.* & ad punctum P erige perpendicularem P R = radio curvaturæ in P, cui occurrant tangentes p t & π t in t, iis parallelæ π s & p s in s, & chorda p π in c. Tum, per Principia Mechanicæ, vis absoluta, quâ urgentur particulæ ambæ p P & P π versûs R, erit ad vim tensionis fili, ut s t ad p t; & hujus vis dimidium, quo urgetur particula una p P, erit ad Nervi tensionem, ut c t ad t p, hoc est, (ob triangula similia c t p, t p R) ut t p vel P p ad R t vel P R. Quare, ob tensionis vim datam, erit vis acceleratrix absoluta ut $\frac{P\,p}{P\,R}$. Sed est acceleratio genita in ratione compositâ ex rationibus vis absolutæ directè & materiæ movendæ inversè; atq; est materia movenda ipsa particula P p. Quare est acceleratio ut $\frac{1}{P\,R}$, hoc est ut Curvatura in P. Est enim Curvatura reciprocè ut radius circuli osculatorii. Q. E. D.

Prob. 1.

Definire motum Nervi tensi.



In hoc Problemate & sequentibus pono Nervum moveri per spatium minimum ab axe motûs; ut incrementum tensionis ex auctâ longitudine, item obliquitas radiorum curvaturæ possint tutò negligi.

Itaq; extendatur Nervus inter puncta A & B; & plectro deducatur punctum z ad distantiam C z ab axe A B. Tum amoto plectro, ob flexuram in puncto solo C, illud primum incipiet moveri (*per Lemma* 2.) At statim inflexo Nervo in punctis proximis Φ & d, incipient hæc puncta etiam moveri; & deinde *E* & e, & sic deinceps. Item ob magnam flexuram in *C*, illud punctum primò velocissime movebitur; & exinde auctâ curvaturâ in punctis proximis *D*, *E*, *&c.* ea continuo velocius accelerabuntur; & eâdem operâ, imminutâ curvaturâ in C, id punctum vicissim tardius accelerabitur. Et universaliter, punctis justò tardioribus magis & velocioribus minùs acceleratis, tandem fiet ut viribus inter se ritè temperatis, motus omnes conspirent, punctis omnibus ad axem simul euntibus & simul redeuntibus, vicibus alternis ad infinitum.

Sed ut hoc fiat debet Nervus semper induere formam curvæ A C D E B, cujus curvatura in quovis puncto E est ut ejusdem distantia ab axe E η; velocitatibus etiam punctorum C, D, E, *&c.* constitutis inter se in ratione distantiarum ab axe C z, D ϑ, E η, *&c.* Etenim in hoc casu,

casu, spatia $C x$, $D \delta$, $E \varepsilon$, *&c.* eodem tempore minimo percursa, erunt inter se ut velocitates, hoc est ut spatia percurrenda $C z$, $D \vartheta$, *&c.* Unde erunt spatia residua $x z$, $\delta \vartheta$, $\varepsilon \eta$, *&c.* inter se in eâdem ratione. Item (*per Lemma* 2.) erunt accelerationes inter se in eâdem ratione. Quo pacto, semper servatâ ratione velocitatum inter se eâdem ac spatiorum percurrendorum, puncta omnia simul pervenient ad axem & simul redibunt: adeoq; rectè definitur curva A C D E B. Q. E. D.

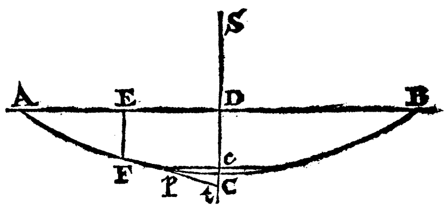
Præterea, comparatis inter se duabus curvis A C D E B, & $A x \delta \varepsilon B$, *per Lemma* 1. erunt curvaturæ in D & δ, ut distantiæ ab axe $D \vartheta$ & $\delta \vartheta$: adeoq; *per Lemma* 2. acceleratio dati cujusvis puncti in Nervo erit ut ejusdem distantia ab axe. Unde (*per Phil. Nat. Princip. Math. Sect.* X. *Prop.* 51.) vibrationes omnes, tam maximæ quam minimæ, peragentur in eodem tempore periodico, & puncti cujusvis motus similis erit oscillationi corporis Funipenduli in Cycloide. Q. E. I,

Cor. Sunt Curvaturæ reciprocè ut radii circulorum osculantium. Sit ergo a linea data, atq; erit radius curvaturæ in $E = \frac{a a}{E \eta}$.

Prob. 2.

Datis longitudine & pondere Nervi, unà cum pondere tendente; invenire tempus unius vibrationis.

Extendatur nervus inter puncta A & B per vim ponderis P, & sit nervi ipsius pondus N, & longitudo L. Item constituatur nervus in positione A F p C B, & ad



punctum

punctum medium C erige normalem C S = radio curvaturæ in C, & occurrentem axi A B in D; & sumpto puncto p ipsi C proximo, duc normalem p c & tangentem p t.

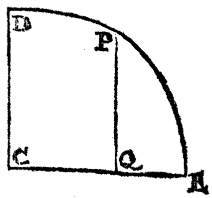
Ergo, ut in Lemmate 2, constat vim absolutam quâ acceleratur particula p C, esse ad vim ponderis P, ut c t ad p t, i. e. ut p C ad C S. Sed est pondus P ad pondus ipsius particulæ p C, in ratione compositâ ex rationibus P ad N, & N ad pondus particulæ p C, vel L ad p C; hoc est, ut $P \times L$ ad $N \times pC$. Quare compositis his rationibus, est vis acceleratrix ad vim gravitatis ut $P \times L$ ad $N \times CS$. Constituatur itaque pendulum longitudine C D: tum (*per Princip. Math. Sect. X. Prob.* 52.) erit tempus periodicum Nervi ad tempus periodicum istius penduli, ut $\sqrt{N \times CS}$ ad $\sqrt{P \times L}$: At (per eandem Proposit.) datâ vi gravitatis longitudines pendulorum sunt in duplicatâ ratione temporum periodicorum; unde erit $\frac{N \times CS \times CD}{P \times L}$, vel (pro C S scripto $\frac{aa}{CD}$, *per Cor. Prob.* 1.) $\frac{N \times aa}{P \times L}$ longitudo penduli cujus vibrationes sunt isochronæ vibrationibus Nervi.

Ad inveniendam lineam a, sit Curvæ abscissa A E = z, & ordinata E F = x, & ipsa Curva A F = v, & C D = b. Tum (*per Cor. Prob.* 1) erit radius curvaturæ in F = $\frac{aa}{x}$. At dato $\dot{v}$ est radius curvaturæ $\frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$. Unde $\frac{aa}{x} = \frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$; adeoq; $aa\ddot{z} = \dot{v}x\dot{x}$: & sumptis fluentibus $aa\dot{z} = \frac{\dot{v}xx}{2} - \frac{\dot{v}bb}{2} + \dot{v}aa$ (ubi additur data quantitas

$-\dot{v}bb$

$\frac{-\dot v\, bb}{2} + \dot v\, aa$, ut fiat $\dot z = \dot v$ in puncto medio C.) Et hinc peracto calculo erit $\dot z = \frac{a^2\dot x - \frac{1}{2} b^2 \dot x + \frac{1}{2} x^2 \dot x}{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} b^4 + \frac{1}{2} b^2 x^2}}$

Evanescant jam b & x respectu a, ut coincidat curva cum axe, & fiet $\dot z = \frac{a\dot x}{\sqrt{bb - xx}}$. At centro C & radio CD = b descripto quadrante circulari DPE, & facto CQ = x, & erectâ normali QP, atque arcu DP existente y, erit $\dot y = \frac{b\dot x}{\sqrt{bb - xx}} = \frac{b}{a}\dot z$.



Unde $y = \frac{b}{a} z$, & $z = \frac{a}{b} y$. Et facto $x = b = CD$, (quo casu etiam fit y = arcui quadrantali DPE, & $z = AD = \frac{1}{2} L$) erit $\frac{1}{2} L = a \times \frac{DE}{CD}$, atq; $a = L \times \frac{CD}{2DE}$. Sit ergo CD ad 2 DE (ut diameter circuli ad circumferentiam) ut d ad c; atq; erit $aa = LL \times \frac{dd}{cc}$. Substituto itaq; hoc valore pro aa, erit $\frac{N}{P} \times L \times \frac{dd}{cc}$ longitudo penduli isochroni ipsi Nervo. Sit ergo D longitudo cujus tempus periodicum est 1, atq; erit $\frac{d}{c}\sqrt{\frac{N}{P} \times \frac{L}{D}}$ tempus periodicum Nervi. Q. E. I. Sunt enim pendulorum tempora periodica in dimidiatâ ratione longitudinum.

Cor. 1. Numerus vibrationum Nervi in tempore unius vibrationis penduli D est $\frac{c}{d} \times \sqrt{\frac{P}{N} \times \frac{D}{L}}$.

Cor. 2. Ob datum $\frac{d}{c} \times \sqrt{\frac{1}{D}}$, tempus periodicum Nervi est ut $\sqrt{\frac{N}{P} \times L}$. Et dato pondere P est tempus ut $\sqrt{N \times L}$. Item constitutis Nervis ex eodem filo, quo casu sit N ut L, est tempus ut L.

V.